Komputerowe Symulacje Numeryczne

Jacek Mostowicz
15.I.2006

Równania różniczkowe zwyczajne

Cel ćwiczenia:
Rozwiązanie układu równań różniczkowych oscylatora harmonicznego:

$$\frac{dV}{dt} = -x(t) \quad ; \quad \frac{dx}{dt} = V(t)$$

Zadany problem:
Wykorzystując trzy metody: Eulera, Rungego-Kutty rzędu 2 (tzw. metoda punktu pośredniego) oraz Rungego-Kutty rzędu czwartego należało rozwiązać powyższy problem.

Metoda Eulera polega na bezpośrednim wyliczeniu wartości dV i dx za pomocą wzorów:

$$V_{n+1} = V_n - dt * x_n$$
$$x_{n+1} = x_n + dt * V_n$$

Jeżeli chodzi o metodę punktu pośredniego to różni się ona od metody Eulera tylko tym, że przy obliczaniu szukanych wielkości wykorzystuje się punkty pośrednie.

$$V_{n+1} = V_n - dt * (x_n + V_n \frac{dt}{2})$$
$$x_{n+1} = x_n + dt * (V_n - x_n \frac{dt}{2})$$

Trzecia metoda (Rungego-Kutty rzędu 4) w przeciwieństwie do powyższej używa trzech punktów pośrednich. Można pokazać to wzorami:

$$q_1 = dt * f(x_n, y_n)$$
$$q_2 = dt * f(x_n + \frac{dt}{2}, y_n + \frac{q_1}{2})$$
$$q_3 = dt * f(x_n + \frac{dt}{2}, y_n + \frac{q_2}{2})$$
$$q_4 = dt * f(x_n + dt, y_n + q_3)$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{q_1}{6} + \frac{q_2}{3} + \frac{q_3}{3} + \frac{q_4}{6}$$

Ostatecznie należało porównać wszystkie trzy metody.

Rozwiązanie:

W celu porównania powyższych metod, należało wyznaczyć odpowiednie wartości dt , dla których energia wahadła jest stabilna z dokładnością do 1%, 0,1%, 0,01% i 0,001%. Wyniki zebrano w poniższej tabelce:

dokładność [%]	metoda Eulera	metoda punktu pośredniego	metoda Rungego-Kuttty rzędu 4
1	0,000264	0,102	0,475
0,1	0,000027	0,05	0,2
0,01	0,0000003	0,022	0,182
0,001	0,00000003	0,005	0,114

Wnioski:

Najszybszą (pod względem wykonywanych iteracji) i najbardziej efektywną metodą jest metoda Rungego-Kutty rzędu czwartego. Na drugim miejscu plasuje się metoda punktu pośredniego. Jak widać w tabeli należało wybrać mniejsze wartości dt , aby otrzymać zadowalające wyniki. Można stwierdzić, że ta metoda jest „punktem pośrednim" między metodą RKr4, a Eulera, łączy ona krótki czas otrzymywania wyników z nieskomplikowanymi operacjami.
Najgorzej w porównaniu wypadła metoda Eulera. Faktem jest to, że używa ona stosunkowo prostych wzorów, ale czas, który należy czekać na wyniki natychmiast ją dyskwalifikuje jako metodę „szybką". Przyczyną tego jest używanie bardzo małych wartości dt co implikuje niesamowicie dużą ilość iteracji do wykonania.