Komputerowe Symulacje Numeryczne

Jacek Mostowicz
27.XI.2005

Aproksymacja średniokwadratowa

Cel ćwiczenia:
Aproksymacja wybranej funkcji;

Zadany problem:
Metoda aproksymacji średniokwadratowej pola na zminimalizowaniu pewniej odległości między funkcją aproksymowaną $y(x)$, a funkcją aproksymującą $F(x)$. Aproksymacja średniokwadratowa (metoda najmniejszych kwadratów) jest zadana przepisem:

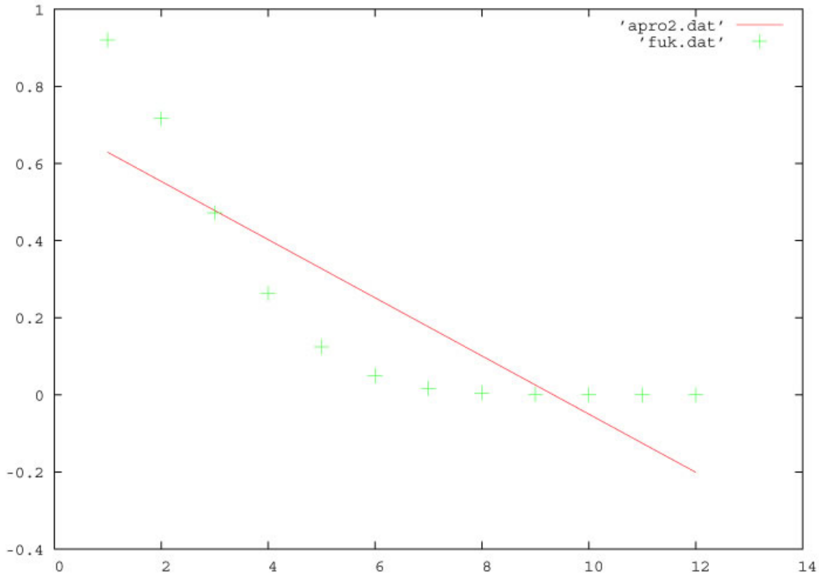
$$\|F(x) - y(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[F(x_i) - y_i \right]^2 = \chi^2$$

W zadaniu należało przybliżyć zadaną funkcję postaci:

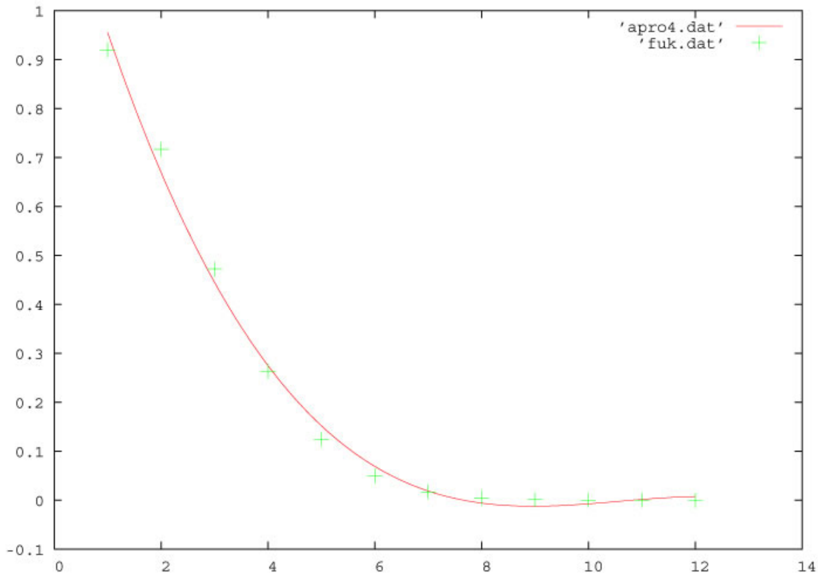
$$f(x) = \exp(-\frac{x^2}{12})$$

odpowiednim wielomianem stopnia N $W(x) = \sum_{l=1}^{N+1} c_l x^{l-1}$ w punktach $x_i = i + 1$ gdzie $i = 0,1,...,11$. Współczynniki c_l wyznaczało się dzięki rozwiązaniu równania $Ac = B$, gdzie A i B są odpowiednio zadanymi macierzami.

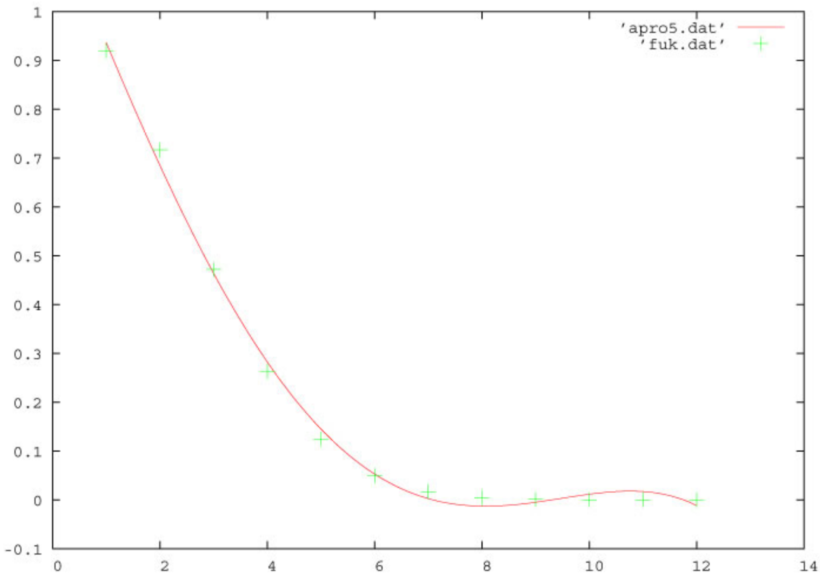
Rozwiązanie:
Na samym początku wyznaczono węzły funkcji f. Następnie dla odpowiedniej wartości N stworzono macierze A i B. Za pomocą funkcji `gaussj.for` znaleziono współczynniki c_l (w zależności od N).
Stosując odpowiedni wzór na aproksymację średniokwadratową otrzymano poniższe zależności:



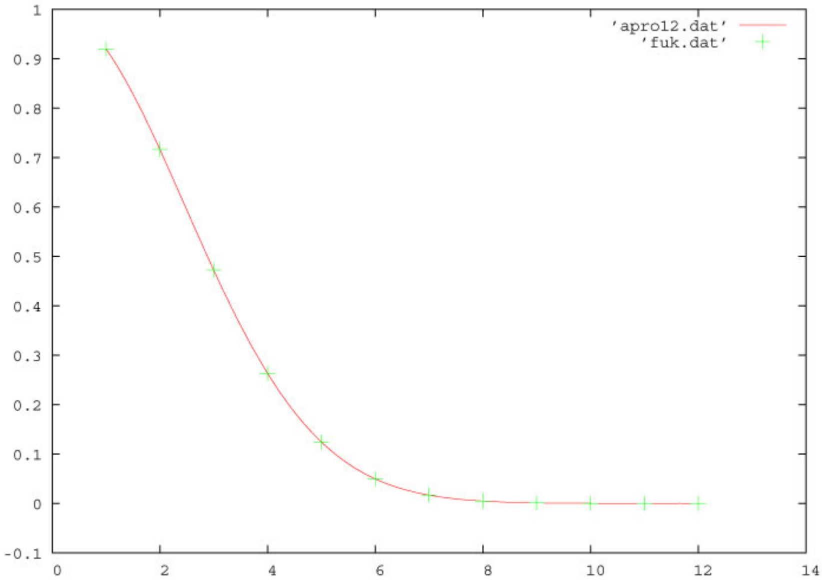
rys1. dla $N = 2$



rys2. dla $N = 4$

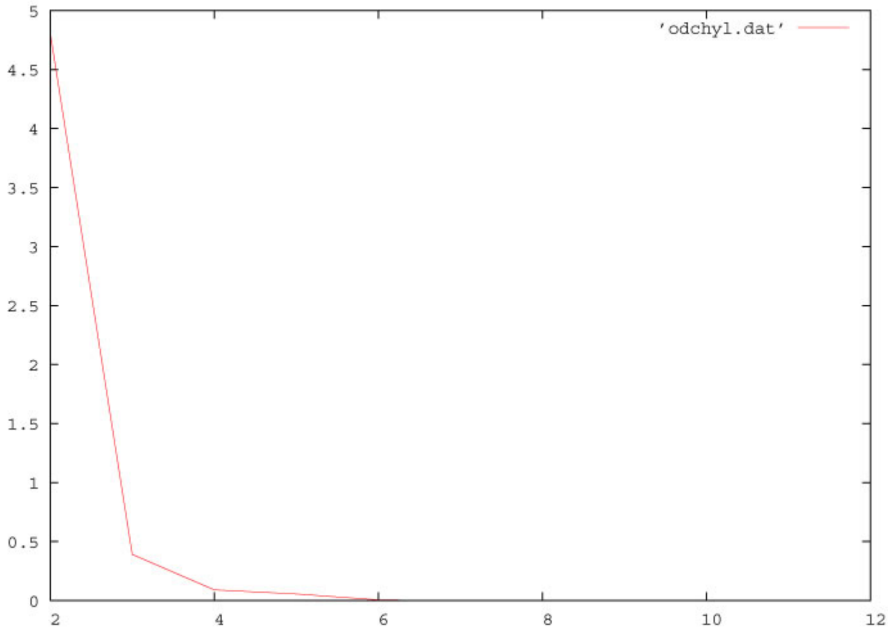


rys3. dla $N = 5$



rys4. dla $N = 12$

Jak widać na powyższych wykresach wartość N ma niebagatelny wpływ na aproksymację funkcji. Im mniejsze N tym odchylenie średniokwadratowe ma większą wartość, co obrazuje wykres poniżej:

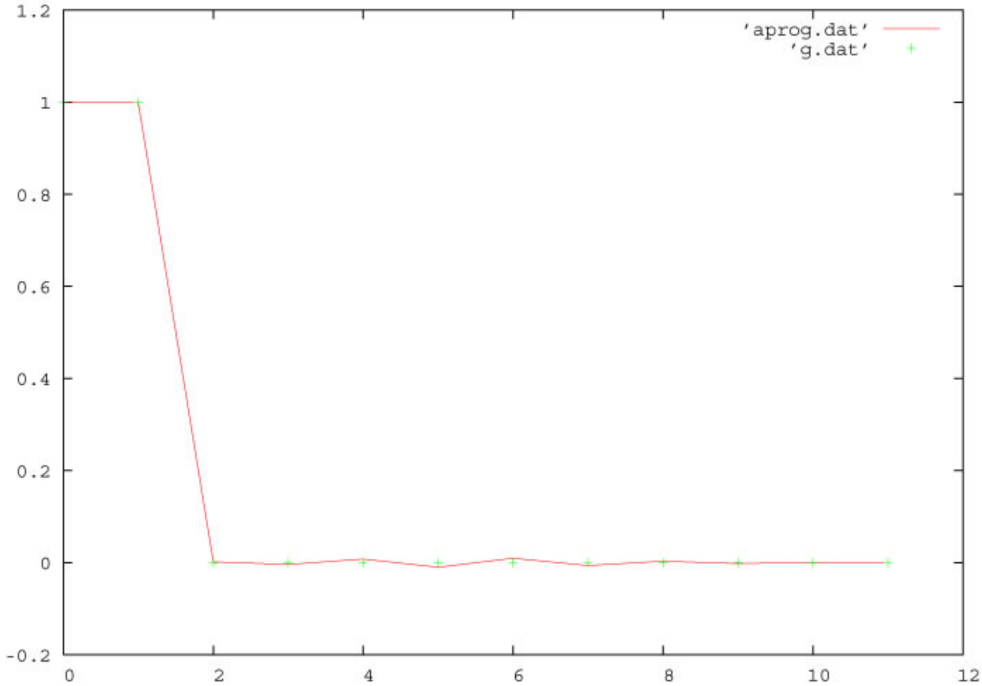


Pozioma oś przedstawia wartości N, a pionowa wartości odchylenia średniokwadratowego. Wykres ten doskonale obrazuje „dziwne" zachowania funkcji interpolującej pokazane na rysunkach 1,2 i 3.

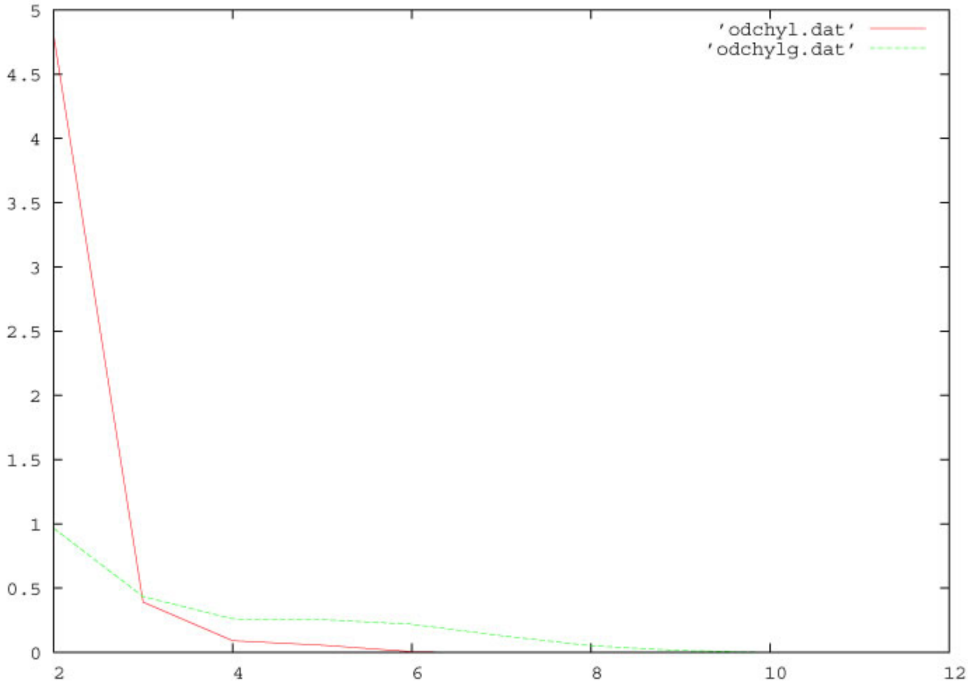
Podobne kroki zastosowano dla funkcji g. Jest to funkcja skokowa o następującym przepisie:

$$g(x) = \begin{cases} 1, x \le 1 \\ 0, x > 1 \end{cases}$$

Na poniższym rysunku widać aproksymację funkcji g.



Kolejny wykres przedstawia porównanie odchylenia średniokwadratowego dla aproksymacji funkcji f i g.



Pozioma oś przedstawia wartości N, a pionowa wartości odchylenia średniokwadratowego. Dla niskich N przybliżenie funkcji skokowej ma mniejsze odchyłki, ale dokładność pozostawia wiele do życzenia.